Anhang C
Probleme zu Kap. 5 des Buches „Systemtheorie ohne Ballast“

Überblick

Nr.	Problem	Stand Nov. 2011
P5.1	Anregung eines stabilen Faltungs–Systems mit einem abklingenden Eingangssignal	gelöst (S. 2–3)
P5.2	Hintereinanderschaltung zweier verallgemeinerter Faltungssysteme	ungelöst
P5.3	Gleichheit zweier verallgemeinerter Faltungssysteme	ungelöst
P5.4	Stabilität verallgemeinerter Faltungssysteme	ungelöst
P5.5	kausaler Mittelwertbilder	gelöst (S. 4–5)
P5.6	Filterpotenzen	ungelöst
P5.7	Definition verallgemeinerter Faltungssysteme	ungelöst
P5.8	Abhängigkeit zwischen zwei Signalen	gelöst (S. 6–7)
P5.9	Basis eines Signalraums	Überlegungen (S. 8–12)
P5.10	kausale bzw. stabile Fortsetzung	gelöst (S. 13–14)
P5.11	Rätsel: Welches System kann sich selbst verarbeiten?	gelöst (S. 15)
P5.12	Man gebe für jedes Fachgebiet ein Systembeispiel an.	begonnen (S. 16–17)
P5.13	Man gebe ein kausales Faltungssystem an, dass weder eindeutig noch stabil ist.	gelöst (S. 18)

Problem 5.1: Stabile Faltungssysteme
Man zeige: Das Ausgangssignal eines stabilen und kausalen LTI–Systems ist bei Anregung mit einem abklingenden Einschaltvorgang ebenfalls abklingend.

Hintergrund
Im Buch auf S. 225 wird das folgende **Regelparadoxon** aufgestellt:
Ein Regelkreis werde mit der Sprungfunktion $\varepsilon(k)$ als Führungsgröße angeregt. Eine verschwindende Regelabweichung $1 - y_\varepsilon(\infty) = 0$ bedeutet, dass das System im Vorwärtspfad mit einem abklingenden Einschaltvorgang angeregt wird. Wenn dieses System stabil ist, folgt ein abklingendes Ausgangssignal $y_\varepsilon(k)$. Dies widerspricht aber $y_\varepsilon(\infty) = 1$. Also muss das System im Vorwärtspfad instabil sein.

Behauptung
Da das System im Vorwärtspfad ein kausales LTI–System ist, das mit einem Einschaltvorgang angeregt wird, der i. F. mit x bezeichnet wird, liegt eine Faltungsoperation gemäß $y = x * h$ vor. Wir zeigen:

Ein stabiles Faltungssystem (Impulsantwort h) reagiert auf ein abklingendes Eingangssignal x mit einem abklingenden Ausgangssignal $y = x * h$.

Beweis
Aus dem Signal $x(k)$ erhält man durch „Abschneiden“ das Signal

$$x_n(k) := r_{[-n,n]}(k) \cdot x(k) \ .$$

Da das Signal $x(k)$ abklingend ist, folgt, dass es durch $x_n(k)$ gemäß

$$\|x - x_n\|_\infty = \sup_{|i|>n} |x(i)| \to 0 \ \text{ für } \ n \to \infty$$

angenähert wird. Aus Gl. (3.29) folgt für die zugehörigen Ausgangssignale

$$\|y - y_n\|_\infty \leq \|h\|_1 \cdot \|x - x_n\|_\infty \to 0 \ \text{ für } \ n \to \infty \ ,$$

d. h. eine Annäherung besteht auch für die Ausgangssignale.
Somit erhält man die folgende Abschätzung für die Ausgangswerte:

$$|y(k)| \leq |y(k) - y_n(k)| + |y_n(k)| \tag{C.1}$$

mit

$$|y(k) - y_n(k)| \leq \|y - y_n\|_\infty \leq \|h\|_1 \cdot \|x - x_n\|_\infty$$

und

$$
\begin{aligned}
|y_n(k)| &= \left|\sum_i x_n(i)h(k-i)\right| = \left|\sum_{i=-n}^{n} x(i)h(k-i)\right| \\
&\le \sum_{i=-n}^{n} |x(i)| \cdot |h(k-i)| \\
&\le \|x\|_\infty \cdot \sum_{i=-n}^{n} |h(k-i)| \\
&= \|x\|_\infty \cdot \sum_{i=k-n}^{k+n} |h(i)| \; .
\end{aligned}
$$

Schlussfolgerung
Es sei $a > 0$ eine beliebig kleine Zahl.

1. Wähle n so groß, dass
$$\|h\|_1 \cdot \|x - x_n\|_\infty < a/2$$
gilt. Dies ist möglich, da $\|x - x_n\|_\infty$ für $n \to \infty$ gegen 0 strebt.
2. Wähle k_0 so groß, dass für alle $|k| \ge k_0$ gilt:
$$\|x\|_\infty \cdot \sum_{i=k-n}^{k+n} |h(i)| < a/2 \; .$$
Dies ist möglich, da $\|h\|_1 < \infty$ ist. Es ist demnach für $k \ge k_0$
$$\sum_{i=k-n}^{k+n} |h(i)| \le \sum_{i \ge k_0 - n} |h(i)|$$
und andererseits für $k \le -k_0$
$$\sum_{i=k-n}^{k+n} |h(i)| \le \sum_{i \le -k_0 + n} |h(i)|$$
mit verschwindenden rechten Seiten für $k_0 \to \infty$.

Aus Gl. (C.1) folgt
$$|y(k)| < a/2 + a/2 = a$$
für $|k| \ge k_0$. Dies bedeutet, dass das Signal $y(k)$ abklingend ist, wie zu zeigen war.

Problem 5.5: Kausaler Mittelwertbilder
Man zeige: Das Ausgangssignal des kausalen Mittelwertbilders ist für jedes erlaubte Eingangssignal konstant.

Anmerkung
Der kausale Mittelwertbilder verhält sich insofern anders als der symmetrische Mittelwertbilder, denn letzterer liefert nach Gl. (2.3) für das Eingangssignal $x(k) = k$ das Ausgangssignal $y(k) = k$, welches nicht konstant ist.

Die Schwierigkeit beim Nachweis besteht darin, dass die erlaubten Eingangssignale des kausalen Mittelwertbilders nicht bekannt sind. Die Vermutung, dass alle beschränkten Signale als Eingangssignale möglich sind, wurde durch das Beispiel in Gl. (5.121) widerlegt. Es wird daher im folgenden Nachweis nur vorausgesetzt, dass für das Eingangssignal der Grenzwert

$$y(k) = \lim_{n\to\infty} y_n(k) \ , \ y_n(k) := \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} x(k-i)$$

für jeden Ausgabezeitpunkt k gebildet werden kann. Im ersten Teil des Beweises wird gezeigt, dass unter dieser Voraussetzung die Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ausgangswerten konstant gleich dem Grenzwert

$$s(k) := y(k) - y(k-1) = s = \lim_{n\to-\infty} \frac{x(n)}{n} \tag{C.2}$$

ist. Im zweiten Teil wird gezeigt, dass $s = 0$ gilt. Die Ausgangswerte des kausalen Mittelwertbilders sind demnach konstant.

Beweis

Teil 1: $\quad s(k) = s = \lim_{n\to-\infty} \frac{x(n)}{n}$

Es ist

$$\begin{aligned} s(k) &= \lim_{n\to\infty} y_n(k) - \lim_{n\to\infty} y_n(k-1) \\ &= \lim_{n\to\infty} [y_n(k) - y_n(k-1)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \left[\sum_{i=0}^{n} x(k-i) - \sum_{i=0}^{n} x(k-1-i) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot [x(k) - x(k-1-n)] \ . \end{aligned}$$

Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(k)}{n+1} = 0$$

folgt

$$s(k) = -\lim_{n\to\infty} \frac{x(k-1-n)}{n+1} \ .$$

Mit Hilfe der Substitution $n \mapsto k-1-n$ erhält man

$$s(k) = -\lim_{n\to-\infty} \frac{x(n)}{k-n} \ .$$

Durch Grenzübergang $n \to -\infty$ folgt wie behauptet der Grenzwert

$$\frac{x(n)}{n} = \frac{x(n)}{k-n} \cdot \frac{k-n}{n} \to -s(k) \cdot (-1) = s(k) \ .$$

Teil 2: $s = 0$
Wir führen die Annahme $s \neq 0$ zum Widerspruch.
Aus Teil 1 folgt die Existenz einer natürlichen Zahl N, sodass für alle $i \leq -N$ gilt:

$$s > 0 \ : \ \frac{x(i)}{i} > \frac{s}{2} \ , \ s < 0 \ : \ \frac{x(i)}{i} < \frac{s}{2} \ .$$

Für $s > 0$ folgt

$$\begin{aligned} y(0) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=-n}^{0} x(i) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=-n}^{-N} x(i) \\ &< y_1 := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=-n}^{-N} i \cdot \frac{s}{2} \end{aligned} \tag{C.3}$$

und analog

$$s < 0 \ : \ y(0) > y_1 \ . \tag{C.4}$$

Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{i=-n}^{-N} i &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=-n}^{0} i - \frac{1}{n+1} \sum_{i=-N+1}^{0} i \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{-n(n+1)}{2} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{-(N-1)N}{2} \end{aligned}$$

strebt für $n \to \infty$ wie $-n/2$ gegen $-\infty$. Für $s > 0$ resultiert $y_1 = -\infty$, für $s < 0$ resultiert $y_1 = \infty$. Aus Gl. (C.3) folgt, dass der Grenzwert $y(0)$ für $s > 0$ nicht existiert ($y(0) < y_1 = -\infty$). Aus Gl. (C.4) folgt, dass der Grenzwert auch für $s < 0$ nicht existiert ($y(0) > y_1 = \infty$). Die Annahme $s \neq 0$ ist damit widerlegt.

Problem 5.8: Abhängigkeit zwischen zwei Signalen
Man zeige: Die Inter–Abhängigkeit zwischen zwei Signalen ist eine transitive Beziehung.

Anmerkung
Eine transitive Beziehung bedeutet, dass für drei Signale x_1 , x_2 und x_3 die folgende Aussage gilt: Besteht eine Abhängigkeit zwischen den Signalen x_1 , x_2 und außerdem eine Abhängigkeit zwischen den Signalen x_2 , x_3, dann besteht auch eine Abhängigkeit zwischen x_1 und x_3.
Dieses Problem wird im Buch **Signaltheorie und Kodierung** in der Übung 5.7 behandelt. Der Nachweis ist unkompliziert, aber man muss dennoch aufpassen: Die Aussage gilt nämlich nur unter der Voraussetzung, dass die Signale keine Eigenbewegungen sind. Daher wird im Anschluss an den Beweis ein Gegenbeispiel dargestellt, für das die Transitivität verletzt ist. Die Abhängigkeit für Signale verhält sich damit anders als die Abhängigkeit zwischen Vektoren, denn für Vektoren ist die Transitivität stets erfüllt. Eine Theorie über Abhängigkeiten für Signale ist somit komplizierter als für Vektoren. Dies ist der Grund, warum bislang für Problem 5.9 keine Lösung angegeben werden konnte. Auf den Vergleich zwischen Signalen und Vektoren wird in Problem 5.9 näher eingegangen.

Behauptung
Besteht zwischen den Signalen x_1 , x_2 eine Inter–Abhängigkeit sowie zwischen den Signalen x_2 , x_3, und ist eines der drei Signale **keine** Eigenbewegung, dann besteht auch eine Inter–Abhängigkeit zwischen x_1 und x_3.

Beweis
Aus den Inter–Abhängigkeiten folgt, dass es Impulsantworten a_i und b_i endlicher Dauer ungleich dem Nullsignal gibt, sodass

$$a_2 * x_2 = b_1 * x_1 \ , \ a_3 * x_3 = b_2 * x_2 \tag{C.5}$$

gilt. Aus den beiden Gleichungen erhält man

$$b_2 * (a_2 * x_2) = b_2 * (b_1 * x_1) \ , \ a_2 * (a_3 * x_3) = a_2 * (b_2 * x_2) \ .$$

Zur weiteren Umformung wird ausgenutzt, dass die Faltung assoziativ und kommutativ ist. Die Assoziativität ergibt sich daraus, dass die Impulsantworten a_i und b_i von endlicher Dauer sind (s. Buch, S. 82). Daher gilt

$$(b_2 * b_1) * x_1 = (b_2 * a_2) * x_2 = (a_2 * a_3) * x_3 \ .$$

Was die Abhängigkeit zwischen x_1 und x_3 betrifft, muss man sich nur noch davon überzeugen, dass die Ausdrücke der vorstehenden Gleichung ungleich 0 sind. Dies ergibt sich wie folgt:

1. Die Impulsantworten $b_2 * b_1$, $b_2 * a_2$ und $a_2 * a_3$ sind ungleich 0, da sich bei den Faltungen die Signalbreiten (Filtergrade) addieren,
2. Nach Voraussetzung ist eines der drei Signale x_i keine Eigenbewegung, d. h. einer der drei Ausdrücke in der vorstehenden Gleichung ist ungleich 0. Daher sind alle drei Ausdrücke ungleich 0.

Gegenbeispiel
Es werden für zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen p_1 und p_2 die folgenden drei Eigenbewegungen betrachtet:

$$x_1(k) := p_1^k \, , \; x_2(k) := p_1^k + p_2^k \, , \; x_3(k) := p_2^k \, . \tag{C.6}$$

Wir zeigen, dass zwar eine Inter–Abhängigkeit zwischen x_1 und x_2 sowie zwischen x_2 und x_3 besteht, aber keine Inter–Abhängigkeit zwischen x_1 und x_3.

1. Abhängigkeit zwischen x_1 und x_2:
   Dies folgt daraus, dass das Signal x_1 durch eine FIR–Filterung des Signals x_2 gemäß

   $$x_1(k) = \frac{p_1}{p_1 - p_2} \cdot h_2(k) * x_2(k) \, , \; h_2(k) := \delta(k) - p_2 \delta(k-1) \tag{C.7}$$

   gebildet werden kann, denn es ist

   $$\begin{aligned} h_2(k) * p_1^k &= p_1^k - p_2 p_1^{k-1} = p_1^{k-1}(p_1 - p_2) \, , \\ h_2(k) * p_2^k &= p_2^k - p_2 p_2^{k-1} = 0 \, . \end{aligned}$$

2. Abhängigkeit zwischen x_2 und x_3:
   Indem man in Gl. (C.6) p_1 und p_2 miteinander vertauscht, erhält man anstelle von Gl. (C.7)

   $$x_3(k) = \frac{p_2}{p_2 - p_1} \cdot h_1(k) * x_2(k) \, , \; h_1(k) := \delta(k) - p_1 \delta(k-1) \, . \tag{C.8}$$

3. Unabhängigkeit zwischen x_1 und x_3:
   Für ein FIR–Filter mit der Impulsantwort a gilt

   $$a(k) * x_3(k) = \sum_i a(i) p_2^{k-i} = p_2^k \cdot \sum_i a(i) p_2^{-i} = p_2^k \cdot A(p_2) \, ,$$

   wobei $A(z)$ die Übertragungsfunktion des FIR–Filters bezeichnet. Folglich ist für zwei Impulsantworten a und b endlicher Dauer die Gleichung $a * x_3 = b * x_1$ gleichwertig mit $A(p_2) \cdot p_2^k = B(p_1) \cdot p_1^k$.
   Dies ist aber nur für $A(p_2) = B(p_1) = 0$ möglich, d. h. beide Summanden $a * x_3$ und $b * x_1$ müssen gleich 0 sein.

Problem 5.9: Besitzt jeder Signalraum eine Basis?

Was ist eine Basis?
Eine Basis $\mathbb{E}$ eines Signalraums Ω ist wie folgt gekennzeichnet:

1. $\Omega = \mathbf{LTI}(\mathbb{E})$:
   Alle Signale x des Signalraums können gemäß
   $$x = \mathrm{FIR}_1(x_1) + \cdots + \mathrm{FIR}_n(x_n) \tag{C.9}$$
   gebildet werden. Hierbei sind x_1 , ... , x_n eine beliebige Auswahl endlich vieler Signale aus $\mathbb{E}$ und FIR_1 , ... , FIR_n beliebige FIR–Filter.
2. Unabhängigkeit:
   Die Signale von $\mathbb{E}$ sind unabhängig. Dies bedeutet, dass für beliebige Signale $x_i \in \mathbb{E}$ und FIR–Filter FIR_i die Gleichung
   $$\mathrm{FIR}_1(x_1) + \mathrm{FIR}_2(x_2) + \cdots + \mathrm{FIR}_n(x_n) = 0 \tag{C.10}$$
   nur dann erfüllbar ist, wenn alle Summanden $\mathrm{FIR}_i(x_i)$ gleich 0 sind.

Überblick
Die Fragestellung hat Ähnlichkeit mit der Fragestellung, ob ein Vektorraum eine Basis besitzt. Tatsächlich kann die Existenz einer Basis für jeden Vektorraum nachgewiesen werden. Die einzige Schwierigkeit besteht darin, dass das Prinzip der vollständigen Induktion nicht ausreicht, sondern auf das Prinzip der transfiniten Induktion zurückgegriffen werden muss. Die angewandten Methoden für Vektorräume können leider nicht auf Signalräume angewandt werden. Um zu erkennen, woran dies liegt, werden zunächst zwei Methoden rekapituliert, wie für einen Vektorraum eine Basis gebildet werden kann. Beide Methoden funktionieren nicht für Signalräume, da sich Signale anders verhalten als Vektoren. Beispielsweise können aus abhängigen Signalen durch FIR–Filterungen unabhängige Signale gewonnen werden. Es können sogar aus einem einzigen Signal durch FIR–Filterungen unanhängige Signale gebildet werden, sofern es sich bei dem Signal um eine Eigenbewegung handelt. Aufbauend auf der Möglichkeit, durch FIR–Filterungen aus abhängigen Signalen unabhängige Signale zu bilden, wird eine Methode (Methode 3) zur Bildung einer Basis vorgeschlagen. Der Nachweis, dass diese Methode stets zum Erfolg führt, ist ein offenes Problem.

Ergänzung einer unabhängigen Menge (Methode 1)

Es sei U eine Menge unabhängiger Vektoren eines Vektorraums Ω. Falls jeder Vektor x des Vektorraums durch Linearkombination aus Vektoren von U gebildet werden kann, ist U bereits eine Basis. Der zweite Fall ist interessanter:

$$x \notin \mathbf{LIN}(U) \; .$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{LIN}(U)$ die **lineare Hülle** von U. Sie enthält per Definition alle Linearkombinationen

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n$$

mit beliebigen Vektoren $x_i \in U$. Aus $x \notin \mathbf{LIN}(U)$ folgt, dass die Vektoren aus U und der Vektor x unabhängig sind:
Zum Nachweis wird die Gleichung

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n + \mu x = 0$$

betrachtet. Hierbei sind x_i beliebige Vektoren aus U und μ_i sowie μ Linearfaktoren. Aus $x \notin \mathbf{LIN}(U)$ folgt zunächst $\mu = 0$. Es ist also

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n = 0 \; .$$

Aus der Unabhängigkeit von U folgt, dass auch $\mu_i = 0$ gelten muss. Die Vektoren aus U und der Vektor x sind somit unabhängig.

Schlussfolgerung
Wenn $x \notin \mathbf{LTI}(U)$ gilt, wird U unter Beibehaltung der Unabhängigkeit um den Vektor x **erweitert**. Dieser Erweiterungsprozess kann solange durchgeführt werden, bis kein Vektor $x \notin \mathbf{LIN}(U)$ gefunden werden kann — sofern der Vektorraum durch endlich viele Vektoren erzeugbar ist (d. h. eine endliche Dimension besitzt). Dann stellt U eine Basis des Vektorraums dar.

Gegenbeispiel für Signale
Die Menge $U = \{\delta\}$ wird durch den Vektor

$$x := \varepsilon \notin \mathbf{LTI}(U)$$

nicht unter Beibehaltung der Unabhängigkeit erweitert, denn die Signale δ und ε sind voneinander abhängig, wie die folgende Beziehung zeigt:

$$\varepsilon' = \delta \; .$$

Reduktion eines Erzeugers (Methode 2)

Es sei $\mathbb{E}$ ein Erzeuger des Vektorraums Ω, d. h. es gilt $\Omega = \mathbf{LIN}(\mathbb{E})$. Falls die Vektoren von $\mathbb{E}$ unabhängig sind, ist $\mathbb{E}$ bereits eine Basis.
Der zweite Fall ist interessanter:

Die Vektoren von $\mathbb{E}$ sind **nicht** unabhängig.

In diesem Fall kann durch Entfernen eines Vektors aus $\mathbb{E}$ ein neuer (reduzierter) Erzeuger gefunden werden:
Da die Vektoren von $\mathbb{E}$ nicht unabhängig sind, ist die Gleichung

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n = 0$$

für bestimmte Vektoren $x_i \in \mathbb{E}$ erfüllt, wobei nicht alle Linearfaktoren μ_i gleich 0 sind. Ist beispielsweise $\mu_n \neq 0$, folgt die Darstellung

$$x_n = -\frac{\mu_1}{\mu_n} x_1 - \cdots - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} x_{n-1} ,$$

d. h. es ist $x_n \in \mathbf{LIN}(\mathbb{E})$. Daraus folgt, dass x_n zur Erzeugung des Vektorraums nicht benötigt wird:

$$\Omega = \mathbf{LIN}(U \setminus \{x_n\}) .$$

Schlussfolgerung
Wenn die Vektoren von U abhängig sind, kann U reduziert werden, wobei auch mit der reduzierten Menge alle Vektoren des Vektorraums gebildet werden können. Dieser Reduktionsprozess kann solange durchgeführt werden, bis durch eine weitere Reduktion die Unabhängigkeit verletzt wird — sofern der Vektorraum durch endlich viele Vektoren erzeugbar ist. Dann stellt die reduzierte Menge eine Basis des Vektorraums dar.

Gegenbeispiel für Signale
Die Menge $\mathbb{E} = \{\varepsilon\ ,\ 1-\varepsilon\}$ ist der Erzeuger eines Signalraums Ω. Dieser Signalraum enthält alle Signale, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt und ab einem bestimmten Zeitpunkt konstant sind (s. Buch, S. 294, Beispiel 8). Die Signale ε und $1-\varepsilon$ sind nicht unabhängig, denn es gilt

$$\varepsilon' + (1-\varepsilon)' = \delta - \delta = 0 .$$

Trotzdem kann der Erzeuger **nicht** reduziert werden, denn die beiden Signalräume

$$\Omega_1 := \mathbf{LTI}(\varepsilon)\ ,\ \Omega_2 := \mathbf{LTI}(1-\varepsilon)$$

enthalten nicht alle Signale von Ω: Der Signalraum Ω_1 enthält nur Einschaltvorgänge, die ab einem bestimmten Zeitpunkt konstant sind. Der Signalraum Ω_2 enthält nur Ausschaltvorgänge, die bis zu einem bestimmten Zeitpunkt konstant sind.

Transformation eines Erzeugers (Methode 3)

Beispiel
Im soeben dargestellten Gegenbeispiel mit den Signalen $x_1 = \varepsilon$ und $x_2 = 1 - \varepsilon$ kann eine Basis durch die Bildung der Signale

$$y_1 := x_1 = \varepsilon \; , \; y_2 := x_1 + x_2 = 1 \tag{C.11}$$

gefunden werden. Obwohl die Signale x_1 , x_2 abhängig sind, sind die Signale y_1 und y_2 unabhängig: Eine FIR–Filterung der Sprungfunktion ergibt einen Einschaltvorgang, während eine FIR–Filterung des konstanten Signals $y_2(k) = 1$ ein konstantes Signal ergibt. Die Gleichung

$$\mathrm{FIR}_1(y_1) + \mathrm{FIR}_2(y_2) = 0$$

kann daher nur erfüllt sein, wenn das konstante Signal $\mathrm{FIR}_1(y_1) = 0$ und damit beide Summanden gleich 0 sind. Die Signale y_1 und y_2 sind somit unabhängig. Andererseits können mit Hilfe dieser Signale alle Signale aus Ω durch FIR–Filterung gebildet werden, denn es können insbesondere die Signale x_1 und x_2 gemäß

$$x_1 = y_1 \; , \; x_2 = y_2 - x_1 = y_2 - y_1$$

erzeugt werden. Die Signale y_1 , y_2 stellen daher eine Basis des Signalraums Ω dar. Diese Basis wird durch die Transformation der abhängigen Signale x_1 , x_2 gemäß Gl. (C.11) gebildet.

Verallgemeinerung
Es wird die folgende Methode (Methode 3) zur Bildung einer Basis vorgeschlagen.

1. Reduktion eines Erzeugers:
   Ausgehend von einem Erzeuger (mit endlich vielen Signalen) werden schrittweise Signale entfernt, die nicht benötigt werden. Das sind Signale, die von den übrigen Signalen des Erzeugers erzeugt werden können. Man erhält einen reduzierten Erzeuger $\mathbb{E}$, der die folgende Eigenschaft besitzt: Kein Signal aus $\mathbb{E}$ kann durch die übrigen Signale aus $\mathbb{E}$ erzeugt werden.
2. Transformation:
   Anstelle der Signale x_1 , ... , x_n des (reduzierten) Erzeugers werden die Signale

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{FIR}_{1,1}(x_1) + \cdots + \mathrm{FIR}_{1,n}(x_n) \; , \\ y_2 &= \mathrm{FIR}_{2,1}(x_1) + \cdots + \mathrm{FIR}_{2,n}(x_n) \; , \\ &\ldots \end{aligned}$$

   gebildet. Die FIR–Filter werden so gewählt, dass die Signale y_i unabhängig sind und aus diesen Signalen durch FIR–Filterungen die ursprünglichen Signale x_i zurückgewonnen werden können.

Die zweite Eigenschaft der Signale y_i garantiert, dass diese Signale ebenfalls einen Erzeuger des Signalraums Ω darstellen. Wegen ihrer Unabhängigkeit bilden sie eine Basis des Signalraums Ω.

Beispiel
Es wird i. F. das Beispiel im Buch auf S. 304 betrachtet. Demnach wird von einem Erzeuger aufgegangen, der die vier Signale

$$x_1 = \varepsilon(k)\ ,\ x_2 = 1\ ,\ x_3 = 1 - \varepsilon(k)\ ,\ x_4 = \delta(k)\ .$$

enthält.

1. Reduktion des Erzeugers:
   Eine Reduktion des Erzeugers ist auf verschiedene Weise möglich:

   a. $\mathbb{E}_1 = \{x_2\ ,\ x_3\}$:
      Aus $x_1 = x_2 - x_3$ folgt zunächst, dass das Signal x_1 aus dem Erzeuger entfernt werden kann. Aus $x_4 = -x_3'$ folgt, dass das Signal x_4 entbehrlich ist.
   b. $\mathbb{E}_2 = \{x_1\ ,\ x_3\}$:
      Folgt aus $x_2 = x_1 + x_3$ und $x_4 = -x_3'$.
   c. $\mathbb{E}_3 = \{x_1\ ,\ x_2\}$:
      Folgt aus $x_3 = x_2 - x_1$ und $x_4 = x_1'$.

2. Transformation:
   In den Fällen (a) und (c) ist bereits eine Basis gefunden, denn die Signale x_2 , x_3 sowie x_1 , x_2 sind voneinander unabhängig:
   Eine FIR–Filterung des konstanten Signals $x_2(k) = 1$ ergibt ein konstantes Signal, während eine FIR–Filterung von $x_1 = \varepsilon$ einen Einschaltvorgang und eine FIR–Filterung von $x_3 = 1 - \varepsilon$ einen Ausschaltvorgang liefert. Die Gleichung $\mathrm{FIR}_2(x) + \mathrm{FIR}_3(x_3) = 0$ bzw. $\mathrm{FIR}_1(x_1) + \mathrm{FIR}_2(x_2) = 0$ kann daher nur erfüllt sein, wenn beide Summanden gleich 0 sind.
   Im Fall (b) besteht eine Abhängigkeit zwischen den Signalen $x_1 = \varepsilon$ und $x_3 = 1 - \varepsilon$. In Gl. (C.11) wurde ausgeführt, wie durch die Transformation

   $$y_1 = x_1 = \varepsilon\ ,\ y_2 = x_1 + x_3 = 1$$

   aus diesen beiden Signalen eine Basis gebildet werden kann. Die Methode 3 führt somit in jeden Fall auf eine Basis.

Anmerkung
Der zweite Schritt der Methode 3 funktioniert bei Vektoren nicht, denn aus abhängigen Vektoren können durch eine Transformation keine unabhängigen Vektoren gebildet werden. Abhängigkeiten zwischen Vektoren bleiben vielmehr bestehen. In dieser Hinsicht unterscheiden sich Signale von Vektoren. Der Unterschied wird noch deutlicher, wenn man die beiden Beziehungen Gl. (C.7) und Gl. (C.8) betrachtet. Demnach können aus dem Signal $p_1^k + p_2^k$ durch zwei FIR–Filterungen die beiden unabhängigen Signale p_1^k und p_2^k gewonnen werden.

Problem 5.10: Kausale und stabile Fortsetzung
Gelingt für ein kausales und stabiles LTI–System eine Fortsetzung, die ebenfalls kausal und stabil ist?

Dieses Problem wird in den folgenden Quellen behandelt:

1 I. W. Sandberg, „Multidimensional nonlinear myopic maps, Volterra series, and uniform neural-Network approximations“, Proc. of the 4th workshop on intelligent methodes for signal processing and communications, Bayona, Spain, pp. 99–128, Jun. 1996.
2 I. W. Sandberg, „Causality and the impulse response scandal“, IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl., vol. 50, no. 6, pp. 578–580, Jun. 2003.

Ausgangspunkt

Ausgangspunkt ist ein LTI–System S, welches auf einem Signalraum $\Omega \subset l^\infty$ definiert ist. Hierbei bezeichnet l^∞ den Signalraum aller beschränkten Signale. Die Fortsetzung bezieht sich bei Sandberg auf diesen Signalraum, d.h. das System S soll auf alle beschränkten Signale als Eingangssignale erweitert werden. Allgemeiner kann eine Erweiterung auf alle zeitdiskreten Signale angestebt werden. In diesem Fall stellt die Systemerweiterung ein universelles System dar.

LTI–Systeme als Funktionale

Der Nachweis einer Fortsetzung basiert bei Sandberg auf dem Trick, ein LTI–System auf ein Funktional zurückzuführen. Es ist nämlich

$$S(x)(k) = S(\tau_{-k}(x))(0) \,. \tag{C.12}$$

Demgemäß wird das Eingangssignal x zunächst um k Zeiteinheiten nach links verschoben. Dann wird die Systemoperation S angewandt und das Ausgangssignal zum Zeitpunkt 0 abgegriffen. Diese Darstellung ist möglich, da das System S zeitinvariant ist. Nun kommen Funktionale ins Spiel. (Reelle) Funktionale sind Abbildungen eines Signalraums auf die Menge der reellen Zahlen. Mit Hilfe des Funktionals

$$F(x) := S(x)(0) \tag{C.13}$$

kann das LTI–System gemäß

$$S(x)(k) = F(\tau_{-k}(x)) \tag{C.14}$$

dargestellt werden. Damit ist das LTI–System S mit Hilfe des Funktionals F dargestellt.

Fortsetzung eines linearen Funktionals

Das Fortsetzungsproblem kann dadurch in Angriff genommen werden, indem das Funktional F fortgesetzt wird. Für das fortgesetzte Funktional F^+ erweist sich

$$S^+(x)(k) = F^+(\tau_{-k}(x)) \tag{C.15}$$

als Fortsetzung des Systems S. Für ein LTI–System S ist das Funktional F linear. Daher ist F^+ ebenfalls linear wählbar und damit S^+ ein LTI–System. Da jedes lineare Funktional sogar auf auf den Signalraum aller zeitdiskreten Signale fortgesetzt werden kann, ist eine Erweiterung des LTI–Systems zu einem universellen System stets möglich.

Kausalität
Für ein Faltungssystem bedeutet Kausalität, dass die Impulsantwort h für Zeitpunkte $k < 0$ gleich 0 ist. Kausalität kann dadurch erzwungen werden, indem die nicht notwendigerweise kausale Impulsantwort h mit der Sprungfunktion multipliziert wird, d.h. es wird $h(k)\varepsilon(k)$ gebildet. Diese Methode ist auch allgemein für beliebige LTI–Systeme möglich, indem in die Systemerweiterung S^+ das System Q eingeführt wird, welches durch

$$Q(x)(k) := \begin{cases} x(k) : k \leq 0 \\ 0 : k > 0 \end{cases} . \tag{C.16}$$

definiert ist. Es werden demnach Signalwerte rechts vom Nullpunkt auf 0 gesetzt. Diese Operation wird in die Systemerweiterung gemäß

$$S^+(x)(k) := (SQ\tau_{-k}(x))(0) \tag{C.17}$$

eingeschleust. Damit bleibt die Kausalität des Systems S in der Systemerweiterung S^+ erhalten.

Stabilität
Nach dem Satz von Hahn–Banach kann ein lineares und beschränktes Funktional unter Beibehaltung seiner Norm erweitert werden. Dieses Resultat benutzt Sandberg, um eine Systemerweiterung eines stabilen LTI–Systems S zu einem stabilen LTI–System S^+ durchzuführen, dass nunmehr für alle beschränkten Signale (Signalraum l^∞) definiert ist. Eine zweite Fortsetzung des stabilen LTI–Systems S^+ auf den Signalraum aller zeitdiskreten Signale ermöglich sogar eine Systemerweiterung zu einem stabilen und universellen LTI–System.

Problem 5.11: Welches System kann sich selbst verarbeiten?

Lösung

Ein System, dass sich selbst verarbeiten kann, muss durch ein Signal beschrieben werden können, mit dem das System angeregt wird. Ein Faltungssystem wird durch seine Impulsantwort h vollständig beschrieben, denn die Systemoperation lautet $y = x * h$. Die Anregung des Systems mit h erfordert, dass h mit sich selbst faltbar ist. Dies ist beispielsweise für ein kausales Faltungssystem erfüllt. Daher ist ein kausales Faltungssystem ein Beispiel für ein System, das sich selbst verarbeiten kann.

Problem 5.12: Man gebe für jedes Fachgebiet ein Systembeispiel an.

Im folgenden sind erste Überlegungen zu Systembeispielen zusammengefasst. Zunächst werden Systembeispiele genannt, die im Buch angesprochen werden. Dann werden zwei Systembeispiele aus den Wirtschaftswissenschaften und der Biologie skizziert: Die Synthese von Zeitreihen und biologische Systeme. Diese Beispiele erfordern eine Erweiterung des im Buch verwendeten Modells für Signale und Systeme. Bei der Synthese von Zeitreihen wird ein System mit einem zufälligen Signal angeregt. Bei biologischen Systemen werden mehrere Eingangssignale verarbeitet und mehrere Ausgangssignale erzeugt, und zwar auf eine nichtdeterministische und nichtlineare Art und Weise.

1. Mathematik
In der Mathematik begegnen uns Systeme als Abbildungen oder Operatoren, die einem Element x (einer Menge X) ein Element y (einer Menge Y) zuordnen. Handelt es sich bei X und Y um Signalräume, liegt ein System vor. Eine injektive Abbildung wird im Buch als **eindeutiges** System bezeichnet, die zu einer Abbildung inverse Abbildung als **inverses System** oder **Umkehrsystem**.

2. Elektrische Netzwerke
Im Buch wird anhand des RC–Glieds die Linearität eines Systems erläutert. Das RC–Glied ist ein Beispiel für ein elektrisches Netzwerk. Enthält das Netzwerk nur Widerstände, Kondensatoren und Spulen, handelt es sich um ein lineares Netzwerk. Lineare Netzwerke können als lineare Systeme beschrieben werden — vorausgesetzt, das Netzwerk befindet sich vor dem Einschaltzeitpunkt des Eingangssignals in Ruhe. Dies bedeutet, dass alle Energiespeicher im Netzwerk, d. h. alle Kondensatoren und Spulen, „entladen“ sind.

3. Tontechnik
Im Buch wird dargestellt, wie mit Hilfe einer Faltung ein Tonsignal verhallt oder enthallt werden kann. Die Rückkopplung wird durch die Vorstellung erklärt, ein Tonsignal zu verhallen.

4. Bildtechnik
Im Buch wird die digitale Filterung eines Bildes zur Betonung der Konturen demonstriert (Differenzierer). Durch Tiefpassfilterung wird der Alias–Effekt vermieden, der bei der Unterabtastung eines Bildes auftritt. Mit Hilfe einer Filterung wird die Verschiebung eines Bildes um eine nichtganzzahlige Anzahl von Bildpunkten ermöglicht.

5. Wirtschaftswissenschaften
Ein erstes Beispiel ist die Bildung des gleitenden Mittelwerts. Damit kann eine Zeitreihe geglättet werden und damit ihre Entwicklungstendenz verdeutlicht werden.
Ein zweites Beispiel ist die Synthese von Zeitreihen. Eine Zeitreihe zur Darstellung

einer wirtschaftlichen Entwicklung kann durch Anregung eines LTI–Systems mit sog. weißem Rauschen gebildet werden. Bei FIR–Filtern spricht man von einem MA–Modell (Moving Average), bei IIR–Filtern von einem ARMA–Modell (Auto Regressiv Moving Average).

6. Biologie
Bei einem „biologischen System“ werden Nervenimpulse der sensorischen Nervenbahnen als Eingangssignale aufgefasst. Die Verarbeitung dieser Nervenimpulse entspricht einer Systemoperation. Die Nervenimpulse der motorischen Nervenbahnen werden als Ausgangssignale aufgefasst. Das biologische System verarbeitet offenbar ein ganzes Bündel von Eingangssignalen und reagiert mit einem Bündel von Ausgangssignalen. Die Art der Verarbeitung erfolgt — sofern bewusste Entscheidungen beteiligt sind — vermutlich nicht vorhersagbar, d. h. es handelt sich um ein nichtdeterministisches System. Die Verarbeitung der Nervenimpulse in einer einzelnen Nervenzelle erfolgt auf nichtlineare Weise, da eine Erregungsschwelle überschritten werden muss, damit die Nervenzelle entsprechend reagiert.

Problem 5.13: Systembeispiel
Man gebe ein kausales Faltungssystem an, dass weder eindeutig noch stabil ist

Hintergrund
In Tab. 2.4 auf S. 47 des Buches ist unter Nr. 13 ein Beispiel für ein kausales LTI–System angegeben, dass weder eindeutig noch stabil ist. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, ob auch ein Faltungssystem mit den gewünschten Eigenschaften angegeben werden kann.

Lösung von Janek Blau, Nov. 2011
Er schlägt die Hintereinanderschaltung des Differenzierers (System 1) und des Faltungssystems mit der Impulsantwort $\varepsilon(k)2^k$ (System 2) vor.

1. Stabilität:
   Da es sich bei beiden Systemen um kausale Faltungssysteme handelt, ist das Gesamtsystem ebenfalls ein kausales Faltungssystem (zumindest für Einschaltvorgänge als Eingangssignale). Das exponentielle Aufklingen der Impulsantwort $\varepsilon(k)2^k$ ist dafür verantwortlich, dass auch die Impulsantwort des Gesamtsystems exponentiell aufklingt. Es ist nämlich für $k > 0$ die Impulsantwort gleich $h(k) = 2^{k-1}$. Das Gesamtsystem ist daher nicht stabil.
2. Eindeutigkeit:
   Ein konstantes Eingangssignal bewirkt am Ausgang des Differenzierers das Nullsignal. Konstante Eingangssignale führen daher auch am Ausgang des Gesamtsystems zum Nullsignal. Das Gesamtsystem ist daher nicht eindeutig.

Anmerkung
Das Faltungssystem mit der Impulsantwort $\varepsilon(k)2^k$ ist realisierbar, denn die Impulsantwort stimmt mit der einer Rückkopplung 1. Ordnung mit dem Rückkopplungsfaktor $\lambda = 2$ überein. Das Gesamtsystem ist daher ebenfalls realisierbar.

Schönheitsfehler
Die Impulsantwort h der Hintereinanderschaltung ist nicht mit einem konstanten Signal faltbar, d.h. die Faltungsdarstellung gilt nicht für konstante Eingangssignale. Andererseits werden konstante Eingangssignale benötigt, um die Eindeutigkeit zu widerlegen. Daraus ergibt sich das folgende Problem:

Problem 5.13A:
Man gebe eine kausale Impulsantwort h und einen Signalraum Ω mit den folgenden Eigenschaften an:

1. Faltungsdarstellung: $y = x * h$ für alle $x \in \Omega$,
2. Verletzung der Eindeutigkeit: $h * x = 0$ für ein $x \in \Omega$, $x \neq 0$,
3. Verletzung der Stabilität: $h \notin l^1$.